量子Lorentz群とその量子包絡環について(作用素環における両側加群について)

中神, 祥臣

数理解析研究所講究録
936 巻 1996 年 80-89

量子 Lorentz 群とその量子包絡環について

横浜市大理　中神祥臣 (Yoshiomi Nakagami)

1995 年 9 月 14 日

1　序文

量子群を von Neumann 環の枠組みで取り扱う場合、その枠組みが一意的に定まるものかどうかはわからない。そこで、量子群の双対定理に相当する命題が成り立つことを条件に定式化を試み、新たな Woronowicz 環という概念に到達した [2] 。これは従来から知られている Kac 環に、変形自己同型と呼ばれる１径数自己同型群を付加したものである。つまり、この自己同型群が自明な場合が Kac 環である。一般に、局所コンパクト群のカテゴリーは、その関数環を考えることにより、Kac 環の部分カテゴリーである。しかし、量子群の場合には、そのカテゴリーが Woronowicz 環の部分カテゴリーに含まれるかどうかは自明ではなく、個々の例を検討して確かめてみる必要がある。その結果、たとえば、量子群 $SU_q(n)$ 、Podleś-Woronowicz の量子 Lorentz 群 $SL_q(2,\mathbf{C})$ などは Woronowicz 環のカテゴリーに属することがわかる [3] 。そこで、ここでは、これら量子群に対応する量子包絡環と Woronowicz 環の双対として定まる双対 Woronowicz 環の間の関係を問題にすることにする。つまり、Hopf * 環

$$A_q(SU(n)),\quad U_q(SU(n)),\quad A_q(SL(n,\mathbf{C})),\quad U_q(sl(n,\mathbf{C}))$$

とそれぞれに対応する Woronowicz 環

$$L_q^{\infty}(SU(n)),\quad L_q^{\infty}(su(n))^{\wedge},\quad L_q^{\infty}(SL(n,\mathbf{C})),\quad L_q^{\infty}(SL(n,\mathbf{C}))^{\wedge}$$

との関係を論じることにする。ここで注意すべきことは、古典論と違い、量子群の場合には、座標環 $A_q(SL(n,\mathbf{C}))$ やその量子包絡環 $U_q(sl(n,\mathbf{C}))$ の定義が予め与えられているわけではないから、これらの定義から始めなければならない。

問題１。$n\geq 2$ の場合の $A_q(SL(n,\mathbf{C}))$ の定義を求めよ。

問題２。$n\geq 2$ の場合の $U_q(sl(n,\mathbf{C}))$ の定義を求めよ。

これらの定義を与えた上で、

問題３。上記 Hopf * 環と Woronowicz 環の関係を求めよ。

ここでは、この問題３を主目的としながら、問題１、２の検討から始めることにする。その際、コンパクト量子群 $A_q(SU(n))$ 以外の表現には非有界作用素が現れるので、その記述に非有界作用素環を用いるが、ここで扱う量子群の表現は自己随伴になり、取り扱いが簡単でラプラシアンの自己随伴性なども容易にわかる。

なお、この話は黒瀬秀樹氏との共同研究 [1] の一部である。

2 Woronowicz 環

Hopf * 環の定義は良く知られているので、Woronowicz 環の定義だけを復習しておく。目下準備中の研究結果 [4] を用いると、定義の条件は最初に [2] [3] で与えたものより簡単になっている。

定義 1 von Neumann 環 M とそれに作用する余結合的余積 δ の対 (M,δ) 上に、つぎの３条件をみたすユニタリ余逆写像 R、変形自己同型 $\{\tau_t\}$、左不変 Haar 荷重 h が与えられたものを Woronowicz 環という。

1. R は M 上の対合的反自己同型写像である。

2. 写像 $t \in \mathbf{R} \mapsto \tau_t \in \mathrm{Aut}(M)$ は R と可換な１径数自己同型群である。

3. h は M 上の半有限、忠実、正規荷重であり

(a) (左不変性) $\varphi \in M_*^+, x \in \boldsymbol{m}_h{}^+$ に対し

$$h((\mathrm{id}\otimes\varphi)(\delta(x))) = h(x)1$$

(b) ($\{\tau_t\}$ 不変性) $h\circ\tau_t = h$

(c) (強不変性) $x, y \in \boldsymbol{n}_h, \varphi \in M_{*,\tau}^+$ に対して

$$\dot{h}((\varphi\otimes\mathrm{id})(\delta(y^*))(1\otimes x)) = \dot{h}((\varphi\circ\kappa\otimes\mathrm{id})((1\otimes y^*)\delta(x)))$$

が成り立つ。ただし、$M_{*,\tau}^+$ は写像 $t \to \varphi\circ\tau_t \in M_*^+$ が全複素平面で解析的であるような元 $\varphi \in M_*^+$ 全体の集合であり、κ は余逆写像 $R\circ\tau_{-i/2}$ である。

荷重 $h\circ R$ は定義より直ちに右不変 Haar 荷重になる。また Woronowicz 環が可換な場合には、適当な局所コンパクト群の関数環と同型になる。

荷重 h による GNS 表現を $\{\pi_h, \mathcal{H}_h, \eta_h\}$ とする。以後、この同型写像 π_h により M を $\pi_h(M)$ と同一視し、標準的に表現されているものとする。

Haar 荷重の左不変性を用いると、任意の $x, y \in \boldsymbol{n}_h$ に対し

$$W\eta_{h\otimes h}(\delta(y)(x\otimes 1)) = \eta_{h\otimes h}(x\otimes y)$$

をみたす $\mathcal{H}_h \otimes \mathcal{H}_h$ 上の等長作用素 W が存在する。実は、これは $M\bar{\otimes}\mathcal{L}(\mathcal{H}_h)$ に含まれるユニタリ作用素で、$\delta(x) = W(1 \otimes x)W^*$ をみたし、その随伴作用素は五角関係式をみたしている。この作用素は以下の議論で重要な役割を果し、通常 Kac-竹崎作用素と呼ばれている。

各 $\varphi \in M_+$ に対して

$$\hat{\pi}(\varphi) = (\varphi \otimes \mathrm{id})(W^*)$$

とおく。$||\hat{\pi}(\varphi)|| \leq ||\varphi||$ が成り立つ。前双対空間 M_* は積 $\varphi, \psi \mapsto \varphi * \psi = (\varphi \otimes \psi) \circ \delta$ により Banach 環になり、また全複素平面で解析的な部分 $M_{*,\tau}$ は対合 $\varphi^\sharp = \varphi^* \circ \kappa$ により対合多元環になる。このとき、$\hat{\pi}(\varphi * \psi) = \hat{\pi}(\varphi)\hat{\pi}(\psi)$ および $\hat{\pi}(\varphi^\sharp) = \hat{\pi}(\varphi)^*$ が成り立っている。集合 $\{\hat{\pi}(\varphi) : \varphi \in M_*\}$ の生成する von Neumann 環を $\hat{M}$ とし、その上で $\hat{\delta}(y) = \sigma(W^*)(1 \otimes y)\sigma(W), y \in \hat{M}$ とすれば、$\hat{\delta}$ は $\hat{M}$ 上の余結合的余積になる。ただし σ は flip 写像である。そこで、以後 $\sigma(W^*)$ を $\hat{W}$ で表す。もちろん、$\hat{W}^*$ は五角関係式をみたしている。さらに、W は $M\bar{\otimes}\hat{M}$ の元である。

左 Hilbert 環 $\eta_h(\boldsymbol{n}_h \cap \boldsymbol{n}_h^*)$ のモジュラー作用素とモジュラー共役作用素を Δ_h, J_h とする。モジュラー共役作用素を用いて得られる $\hat{R}(y) = J_h y^* J_h, y \in \hat{M}$ は $(\hat{M}, \hat{\delta})$ 上のユニタリ余逆写像である。Haar 荷重 h は変形自己同型 $\{\tau_t\}$ により不変であったから、

$$H^{it}\eta_h(x) = \eta_h(\tau_t(x)), \quad x \in \boldsymbol{n}_h$$

をみたす可逆正自己随伴作用素 H が存在する。定義により変形自己同型は $\tau_t(x) = H^{it}xH^{-it}, x \in M$ をみたす。このことを念頭に、$\hat{M}$ 上でも

$$\hat{\tau}_t(y) = H^{it}yH^{-it}, \quad y \in \hat{M}$$

とすれば、$\{\hat{\tau}_t\}$ は $(\hat{M}, \hat{\delta})$ 上の変形自己同型になる。

以上で、双対 Woronowicz 環 $(\hat{M}, \hat{\delta})$ に必要なものの内、Haar 荷重に関するもの以外は決まったが、Haar 荷重の構成にはもう少し準備がいる。まず、Haar 荷重 h は荷重 $h \circ R$ と可換で、Radon-Nykodŷm 作用素 $\rho = dh/dh \circ R$ が存在する。これは群の場合のモジュールに相当している。つぎに、$x, y \in \boldsymbol{n}_h$ により定まる線形汎関数 $z \in M \mapsto (z\eta_h(x)|\eta_h(y))$ を $\omega_{x,y}$ で表すことにする。部分 * 環 $\boldsymbol{n}_h \cap \boldsymbol{n}_h^*$ の元 x のうち、4つの写像

$$t \mapsto \sigma_t^h(x), \quad t \mapsto \sigma_t^{h \circ R}(x), \quad t \mapsto \tau_t(x), \quad t \mapsto x\rho^{it}$$

が全複素平面で解析的なものの全体を $\boldsymbol{a}_0$ とする。また、前双対空間 M_* の元 φ が不等式

$$||\varphi^*(x)|| \leq \lambda||\eta_h(x)||, \quad x \in \boldsymbol{n}_h$$

をみたすとき、φ は L^2 有界であるということにする。この場合には $\varphi^*(x) = (\eta_h(x)|\hat{\eta}(\varphi))$ をみたす $\mathcal{H}_h$ の元 $\hat{\eta}(\varphi)$ が一意的に定まる。集合 $\{\omega_{x,y} : x, y \in \mathfrak{a}_0\}$ の生成する $M_{*,\tau}$ の部分対合多元環の写像 $\hat{\eta}$ による像は、Hilbert 空間 $\mathcal{H}_h$ から導かれる内積に関して左 Hilbert 環になり、その左表現 π_l は $\pi_l(\hat{\eta}(\varphi)) = \hat{\pi}(\varphi)$ をみたしている。したがって、その左 von Neumann 環は $\hat{M}$ と一致している。そこで、この左 Hilbert 環に付随する $\hat{M}$ 上の荷重を $\hat{h}$ とすれば、$\hat{h}$ は $(\hat{M}, \hat{\delta})$ 上の左不変 Haar 荷重であることがわかり、双対 Woronowicz 環を得ることができる。

今後、Haar 荷重が有界であるような Woronowicz 環をコンパクト、左右の Haar 荷重が一致している Woronowicz 環をユニモジュラーということにする。

定理 1 [5] (M, δ) をコンパクト Woronowicz 環、W をその Kac-竹崎作用素とする。von Neumann 環 $N = M \overline{\otimes} \hat{M}$ 上で

$$\delta^N = (\mathrm{id} \otimes \sigma_W \otimes \mathrm{id}) \circ (\delta \otimes \hat{\delta}), \quad R^N = (R \otimes \hat{R}) \circ \mathrm{Ad}_{W^*},$$

$$\tau_t^N = \tau_t \otimes \hat{\tau}_t, \quad h^N = h \otimes \hat{h} \circ \hat{R}$$

とすれば、(N, δ^N) はユニモジュラーな Woronowicz 環である。ただし、$\sigma_W = \sigma \circ \mathrm{Ad}_{W^*}$ である。

このような Woronowicz 環の作り方を二重群構成法という。Woronowicz 環からの復習はこの位にしておこう。

3 R 行列、L 行列と Hopf * 環

R 行列、L 行列は、量子群の座標環またはその量子包絡環の生成元のみたす基本関係式を与える場合に役に立つ。一般に、R 行列は Yang-Baxter 方程式の解のことであるが、ここではパラメータの無い A_{n-1} 型の R 行列

$$R = \sum_{i,j=1}^{n} q^{\delta_{ij}} e_{ii} \otimes e_{jj} + (q - q^{-1}) \sum_{i>j} e_{ij} \otimes e_{ji}$$

だけを用いる。

まず、コンパクトな量子群の代表例として量子群 $SU_q(n)$ の定義を復習しておく。

定義 2 (Drinfeld, Jimbo, Woronowicz,'86) $q \in \mathbf{R} \backslash \{0\}, n \geq 2$ とする。$n \times n$ 行列 $U = (x_{ij})$ の行列要素 $x_{ij} (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ を生成元とし、それらの間に成り立つ基本関係式が

$$R_{12} U_{13} U_{23} = U_{23} U_{13} R_{12}, \quad \det_q(U) = 1_A, \quad U^* U = U U^* = 1_n$$

で与えられる * 多元環を A とする。A 上には

$$\delta_A : U \mapsto U\dot{\otimes}U, \quad \varepsilon_A : U \mapsto 1_n, \quad \kappa_A : U \mapsto U^{-1}$$

により定まる余積 δ_A、余単位写像 ε_A、余逆写像 κ_A が存在し、$(A, \delta_A, \varepsilon_A, \kappa_A)$ は Hopf * 環になる。これを量子群 $SU_q(n)$ の座標環といい、$A_q(SU(n))$ で表す。

以後、上のように、生成元の間の基本関係式を与える行列 U を量子行列という。

つぎに、L 行列の説明をする。まず、R 行列の転置と逆行列をそれぞれ $R^{(+)} = q^{-1/n}R^t, R^{(-)} = q^{1/n}R^{-1}$ と規格化しておく。上半、下半三角の $n\times n$ 行列 $L^{(+)} = (\varphi_{ij}^{(+)}), L^{(-)} = (\varphi_{ij}^{(-)})$ が基本関係式

$$R_{12}^{(\pm)}L_{13}^{(\pm)}L_{23}^{(\pm)} = L_{23}^{(\pm)}L_{13}^{(\pm)}R_{12}^{(\pm)} \quad \text{(複号同順)}$$

$$R_{12}^{(+)}L_{13}^{(+)}L_{23}^{(-)} = L_{23}^{(-)}L_{13}^{(+)}R_{12}^{(+)}$$

をみたし、しかもそれらの対角要素が

$$\varphi_{ii}^{(-)} = \varphi_{n-i+1,n-i+1}^{(+)}, \quad \varphi_{11}^{(+)}\varphi_{22}^{(+)}\cdots\varphi_{nn}^{(+)} = 1$$

をみたすとき、$L^{(\pm)}$ を L 行列という。

この L 行列を用いると、量子群 $SU_q(n)$ の量子包絡環の定義を簡単に記述することができる。

定義 3 (Drinfeld, Jimbo, Reshetikhin-Takhitadzhyan-Faddeev [7],'90) $q \in \mathbf{R}\backslash\{-1, 0, 1\}$, $n \geq 2$ とする。$n \times n$ L 行列 $L^{(\pm)} = (\varphi_{ij}^{(\pm)})$ が

$$\left(L^{(+)}\right)^{-1} = \left(L^{(-)}\right)^*$$

をみたす場合に、その行列要素 φ_{ij} を生成元とする * 多元環を $\hat{A}$ とする。この上には

$$\delta_{\hat{A}} : L^{(\pm)} \mapsto L^{(\pm)}\dot{\otimes}L^{(\pm)}, \quad \varepsilon_{\hat{A}} : L^{(\pm)} \mapsto 1_n, \quad \kappa_{\hat{A}} : L^{(+)} \mapsto \left(L^{(-)}\right)^*$$

により与えられる余積 $\delta_{\hat{A}}$、余単位写像 $\varepsilon_{\hat{A}}$ および余逆写像 $\kappa_{\hat{A}}$ が存在し、$(\hat{A}, \delta_{\hat{A}}, \varepsilon_{\hat{A}}, \kappa_{\hat{A}})$ は Hopf * 環になる。これを Lie 環 $su(n)$ に対する量子包絡環といい、$U_q(su(n))$ で表す。

つぎに、非コンパクト量子群の例として、Podleś-Woronowicz により [6] で与えられた量子 Lorentz 群 $SL_q(2, \mathbf{C})$ を取り上げる。この定義では、生成元の間に仮定されている基本関係式が余りにも沢山あり記憶し難い。しかし、R 行列を用いると、その定義は驚くほど簡単になり、しかもそのお陰で、定義を高いランクの場合にまでで一気に拡張することができる。

定義 4 (Podleś-Woronowicz [6],'90) $q \in \mathbf{R}\backslash\{0\}, n \geq 2$ とする。$n \times n$ 行列 $Y = (y_{ij})$ の行列要素 $y_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ を生成元とし、それらの間に成り立つ基本関係式が

$$R_{12}Y_{13}Y_{23} = Y_{23}Y_{13}R_{12}, \quad \det_q(Y) = 1_B,$$

$$R_{12}Y_{13}^TY_{23} = Y_{23}Y_{13}^TR_{12} \quad (Y^T = (Y^*)^{-1})$$

で与えられる * 多元環を B とする。B 上には、前と同じようにして定まる余積 δ_B、余単位写像 ε_B、余逆写像 κ_B が存在し、$(B, \delta_B, \varepsilon_B, \kappa_B)$ は Hopf * 環になる。これを n 次量子 Lorentz 群の座標環といい、$A_q(SL(n, \mathbf{C}))$ で表す。

量子群 $SU_q(n)$ の量子行列 U と、Lie 環 $su(n)$ の L 行列 $L^{(+)}$ を用いて、$Y = U\dot{\otimes}(L^{(+)})^{-1}$ とおくと、Y は n 次量子 Lorentz 群の量子行列を与える。

いよいよ、n 次量子 Lorentz 群に対応する量子包絡環の定義に入ろう。

定義 5 $q \in \mathbf{R}\backslash\{-1, 0, 1\}, n \geq 2$ とする。量子群 $SU_{q^{-1}}(n)$ の量子行列 $V = (U^{-1})^t = (z_{ij})$ および Lie 環 $su(n)$ に対応する L 行列 $L^{(\pm)} = (\varphi_{ij}^{(\pm)})$ の行列要素 $z_{ij}(i, j = 1, \cdots, n), \varphi_{ij}^{(+)}(i \leq j), \varphi_{ij}^{(-)}(i > j)$ を生成元とし、それらの間に成り立つ基本関係式が

$$R_{12}^{(\pm)}L_{13}^{(+)}V_{23} = V_{23}L_{13}^{(+)}R_{12}^{(\pm)}$$

で与えられる * 多元環を $\hat{B}$ とする。この上には前と同様にして与えられる余積 $\delta_{\hat{B}}$、余単位写像 $\varepsilon_{\hat{B}}$、余逆写像 $\kappa_{\hat{B}}$ が存在し、$(\hat{B}, \delta_{\hat{B}}, \varepsilon_{\hat{B}}, \kappa_{\hat{B}})$ は Hopf * 環になる。これを Lie 環 $sl(n, \mathbf{C})$ に対する量子包絡環といい、$U_q(sl(n, \mathbf{C}))$ で表す。

この定義の妥当性は別途確認することができる。

4 座標環と量子包絡環の関係

一般に、Hopf * 環 $(A, \delta_A, \varepsilon_A, \kappa_A)$ が与えられると、双対空間 A^* は積 $\varphi * \psi = (\varphi \otimes \psi) \circ \delta_A$、単位元 ε_A、対合 $\varphi^\sharp = \varphi^* \circ \kappa_A$ (または $\varphi^\flat = \varphi^* \circ \kappa_A^{-1}$) により単位的 * 多元環になる。しかも、$A^*$ には充分大きい * 部分多元環 $\hat{A}$ が存在して、余積 $\delta_{\hat{A}}(\varphi)(a \otimes b) = \varphi(ab)$、余単位写像 $\varepsilon_{\hat{A}}(\varphi) = \varphi(1_A)$、余逆写像 $\kappa_{\hat{A}}(\varphi) = \varphi \circ \kappa_A$ により、Hopf * 環になる。これを用いると、量子群 $SU_q(n)$ の座標環 $A_q(SU(n))$ と量子包絡環 $U_q(su(n))$ が双対ペアになっていることが次のようにわかる。

定理 2 $q \in \mathbf{R}\backslash\{-1, 0, 1\}, n \geq 2$ とする。つぎのような Hopf * 環としての埋蔵が存在する。

1. $\varphi \in U_q(su(n)) \mapsto \hat{\varphi} \in A_q(SU(n))^*$.

2. $x \in A_q(SU(n)) \mapsto \hat{x} \in U_q(su(n))^*$.

この定理の証明のうち、準同型写像が単射になることの証明は難しい。つぎに同様なペアリングを量子 Lorentz 群の場合にも考えてみよう。その準備からはじめる。

補題 1 *1.* 座標環 $A_q(SL(n,\mathbf{C}))$ から座標環 $A_q(SU(n))$ への全射準同型写像 π_A で

$$\pi_A(y_{ij}) = x_{ij}, \quad \pi_A(\kappa_B(y_{ji}^*)) = x_{ij}$$

をみたすものがある。

2. 各 $\varphi \in U_q(su(n))$ に対して、$\hat{\varphi} \in A_q(SU(n))^*$ の写像 π_A による引き戻しを $\tilde{\varphi} \in A_q(SL(n,\mathbf{C}))^*$ とする。量子包絡環 $U_q(su(n))$ の L 行列 $L^{(\pm)} = (\varphi_{ij}^{(\pm)})$ に対応して得られる行列を $\tilde{L}^{(\pm)} = (\tilde{\varphi}_{ij}^{(\pm)})$ とすれば、$\tilde{L}^{(\pm)}$ も $U_q(su(n))$ の L 行列である。

3. 写像 $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ により、量子包絡環 $U_q(su(n))$ を Hopf * 環として $A_q(SL(n,\mathbf{C}))^*$ へ埋蔵することができる。

補題 2 *1.* 座標環 $A_q(SL(n,\mathbf{C}))$ から量子包絡環 $U_q(su(n))$ への全射準同型写像 $\pi_{\hat{A}}$ で

$$\pi_{\hat{A}}(y_{ij}) = \kappa_{\hat{A}} \circ \varphi_{ij}^{(+)}, \quad \pi_{\hat{A}}(\kappa_B(y_{ji}^*)) = \kappa_{\hat{A}} \circ \varphi_{ij}^{(-)}$$

をみたすものがある。

2. 各 $z \in A_{q^{-1}}(SU(n))$ に対して、$\hat{z} \in U_q(su(n))^*$ の写像 $\pi_{\hat{A}}$ による引き戻しを $\tilde{z} \in A_q(SL(n,\mathbf{C}))^*$ とする。座標環 $A_{q^{-1}}(SU(n))$ の量子行列 $V = (z_{ij})$ に対応して得られる行列を $\tilde{V} = (\tilde{z}_{ij})$ とすれば、$\tilde{V}$ も座標環 $A_{q^{-1}}(SU(n))$ の量子行列である。

3. 写像 $z \mapsto \tilde{z}$ により、座標環 $A_{q^{-1}}(SU(n))$ を Hopf * 環として座標環 $A_q(SL(n,\mathbf{C}))^*$ へ埋蔵することができる。

補題 3 *1.* 座標環 $A_q(SL(n,\mathbf{C}))$ の解析的部分の上では、$\tilde{V} = \tilde{L}^{(-)}$ となり、反解析的部分の上では、$\tilde{V} = \tilde{L}^{(+)}$ となる。

2. $R_{12}^{(+)}\tilde{L}_{13}^{(+)}\tilde{V}_{23} = \tilde{V}_{23}\tilde{L}_{13}^{(+)}R_{12}^{(+)}$.

これらの補題を組み合わせると次の定理が得られる。

定理 3 *1.* 量子包絡環 $U_q(sl(n,\mathbf{C}))$ から座標環 $A_q(SL(n,\mathbf{C}))$ の双対空間の中への単位的準同型写像 $\tilde{\pi}$ が存在する。

2. 写像 $\tilde{\pi}$ の像が生成する * 多元環は $A_q(SL(n,\mathbf{C}))$ の双対構造から導かれる演算により Hopf * 環になる。

5 Hopf * 環と Woronowicz 環

量子包絡環を非有界作用素環を用いて記述するために、用語の準備をする[8]。Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の稠密部分空間 $\mathcal{D}$ を共通の不変定義域としてもつ非有界作用素 x で、その随伴作用素 x^* の定義域 $\mathcal{D}(x^*)$ が $\mathcal{D}$ を含んでいるようなもの全体を $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D})$ で表す。この多元環は対合 $x \mapsto x^\dagger = x^*|_\mathcal{D}$ により * 多元環になる。この * 多元環の * 部分多元環を O^* 環と呼ぶ。

* 多元環 A から $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D})$ への準同型（または反準同型）写像 π を、A の表現（または反表現）といい、$\{\pi, \mathcal{D}\}$ で表す。

閉作用素 $\pi(a^*)^*, a \in A$ を定義域の共通部分 $\mathcal{D}(\pi^*) = \bigcap_{b\in A}\mathcal{D}(\pi(b^*)^*)$ へ制限したものを $\pi^*(a)$ で表すことにより、準同型（または反準同型）写像 $a \mapsto \pi^*(a)$ が得られる。これを表現（または反表現）π の随伴といい、$\{\pi^*, \mathcal{D}(\pi^*)\}$ で表す。$\pi = \pi^*$ となるときには、自己随伴という。

また、閉作用素 $\overline{\pi(a)}$ を共通部分 $\bigcap_{b\in A}\mathcal{D}(\overline{\pi(b)})$ へ制限したものを $\overline{\pi}(a)$ で表すことにより、準同型（または反準同型）写像 $a \mapsto \overline{\pi}(a)$ が得られ、これを $\{\overline{\pi}, \mathcal{D}(\overline{\pi})\}$ で表す。一般に、$\pi \subset \overline{\pi} \subset \pi^*$ が成り立つ。したがって、すべての $a \in A$ に対し $\overline{\pi(a^*)} = \pi(a)^*$ が成り立つときには、表現 $\overline{\pi}$ は自己随伴である。これから述べる量子包絡環の表現にはこのような状況が現れる。

一般に、与えられた Hopf * 環 $(A, \delta_A, \varepsilon_A, \kappa_A)$ が Haar 状態をもつ場合には、Woronowicz 環の場合と同じようにして、GNS 表現 $\{\pi_h, \mathcal{H}_h, \eta_h\}$ を作ることができ、A^* の L^2 有界な元の全体は A^* の左イデアルになり、しかも集合 $\eta_h(A)$ は Hilbert 空間 $\mathcal{H}_h$ の稠密部分空間に成っている。各 $a \in A$ に対して、等式 $\varphi_a(b) = (\eta_h(a)|\eta_h(b))$ により $\varphi_a \in A^*$ を定めれば、$\hat{\eta}(\varphi_a) = \eta_h(a)$ となる。各 $\varphi \in A^*$ に対して、$\mathcal{H}_h$ 上の作用素 $\hat{\pi}(\varphi), \hat{\pi}'(\varphi)$ を Woronowicz 環の場合と同じように、

$$\hat{\pi}(\varphi)\eta_h(a) = \hat{\eta}(\varphi * \varphi_a) \quad \text{および} \quad \hat{\pi}'(\varphi)\eta_h(a) = \hat{\eta}(\varphi_a * \varphi)$$

で定義すれば、$\hat{\pi}, \hat{\pi}'$ はそれぞれ A^* から $\mathcal{L}^\dagger(\eta_h(A))$ への左、右 Fourier 変換と呼ばれている表現および反表現である。

他方、$\varphi \in A^*$ に対し

$$\lambda(\varphi)\eta_h(a) = \eta_h((\mathrm{id}\otimes\varphi)(\delta(a))), \quad \rho(\varphi) = \eta_h((\varphi\otimes\mathrm{id})(\delta(a)))$$

とすれば、λ, ρ も A^* の $\mathcal{L}^\dagger(\eta_h(A))$ への表現および反表現である。これらの表現または反表現の間には、$\hat{\pi}(\varphi) = \rho(\varphi\circ\kappa^{-1})$, $\hat{\pi}'(\varphi) = \lambda(\varphi\circ\kappa)$ なる関係があり、どれも自己随伴である。つまり、

$$\hat{\pi}(\varphi)^* = \overline{\hat{\pi}(\varphi^\sharp)}, \quad \hat{\pi}'(\varphi)^* = \overline{\hat{\pi}'(\varphi^\flat)}$$

$$\lambda(\varphi)^* = \overline{\lambda(\varphi^\sharp)}, \quad \rho(\varphi)^* = \overline{\rho(\varphi^\sharp)}$$

が成り立っている。

O^* 環 $B(\subset \mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D}))$ の可換子環は、有界な場合と違って、次のように強、弱２種類のものが考えられる。集合

$$\{a \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) : a\mathcal{D} \subset \mathcal{D}, ab\xi = ba\xi \ (\xi \in \mathcal{D}, b \in B)\}$$

を強可換子環、集合

$$\{a \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) : (ab\xi|\eta) = (a\xi|b^\dagger\eta) \ (\xi, \eta \in \mathcal{D}, b \in B)\}$$

を弱可換子環といい、前者は後者に含まれる。前者は対合、また後者は積の演算に関し閉じている保証はない。しかし自己随伴な表現または反表現の像に対しては、これら両者が一致し、von Neumann 環になっている。

命題 1 π を上の４つの表現または反表現のいずれかとすれば、π は自己随伴で

$$(\hat{\pi}(A^*)')' = \hat{\pi}'(A^*)'$$

がなりたつ。

この命題を用いると、われわれの当初の問題に対して、以下のような解答をあたえることができる。

定理 4 [3] $q \in \mathbf{R}\backslash\{0\}, n \geq 2$ とする。座標環 $A_q(SU(n)) = (A, \delta_A, \varepsilon_A, \kappa_A)$ 上の Haar 状態 h_A を用いて、$M = \pi_{h_A}(A)''$ とすれば、M 上には $\delta^M \circ \pi_{h_A} = (\pi_{h_A} \otimes \pi_{h_A}) \circ \delta_A$ をみたす余積 δ^M が存在する。さらに、$\kappa^M \circ \pi_{h_A} = \pi_{h_A} \circ \kappa_A$ をみたす余逆写像、$\kappa^M = R^M \circ \tau_{-i/2}$ と $h^M \circ \pi_{h_A} = h$ をみたす忠実、正規な Haar 状態 h^M が存在し、$L_q^\infty(SU(n)) = (M, \delta^M, R^M, \tau^M, h^M)$ は Woronowicz 環になる。

定理 5 $q \in \mathbf{R}\backslash\{-1, 0, 1\}, n \geq 2$ とする。量子包絡環

$$U_q(su(n)) = (\hat{A}, \delta_{\hat{A}}, \varepsilon_{\hat{A}}, \kappa_{\hat{A}})$$

に対し、

$$L_q^\infty(SU(n))\hat{\ } = (\hat{M}, \delta^{\hat{M}}, R^{\hat{M}}, \tau^{\hat{M}}, h^{\hat{M}})$$

を Woronowicz 環 $L_q^\infty(SU(n))$ の双対 Woronowicz 環とする。もし $\hat{\pi}$ が $A_q(SU(n))^*$ の左 Fourier 変換ならば、$(\hat{\pi}(A^*)')' = \hat{M} = \left(\hat{\pi}(\hat{A})'\right)'$ が成り立つ。

定理 6 $q \in \mathbf{R}\backslash\{-1, 0, 1\}, n \geq 2$ とする。量子 Lorentz 群の座標環を

$$A_q(SL(n, \mathbf{C})) = (B, \delta_B, \varepsilon_B, \kappa_B)$$

とする。

$$L_q^\infty(SL(n,\mathbf{C})) = (N, \delta^N, R^N, \tau^N, h^N)$$

を Woronowicz 環 $L_q^\infty(SU(n))$ から二重群構成法により新たに得られる Woronowicz 環とする。もし B の忠実な表現 π_B を

$$\pi_B(y_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} \pi_{h_A}(x_{ik}) \otimes \overline{\hat{\pi}(\varphi_{kj}^{(+)} \circ \kappa_A)}$$

で定義すれば、$(\pi_B(B)')' = N$ かつ $\delta^N \circ \pi_B = (\pi_B \otimes \pi_B) \circ \delta_B$ が成り立つ。

定理 7 (Open) $q \in \mathbf{R}\backslash\{-1,0,1\}, n \geq 2$ とする。

$$U_q(sl(n,\mathbf{C})) = (\hat{B}, \delta_{\hat{B}}, \varepsilon_{\hat{B}}, \kappa_{\hat{B}})$$

$$L_q^\infty(SL(n,\mathbf{C}))\,\hat{}= (\hat{N}, \delta^{\hat{N}}, R^{\hat{N}}, \tau^{\hat{N}}, h^{\hat{N}})$$

とする。このとき、$\left(\hat{\pi}(\hat{B})'\right)' = \hat{N}$ が成り立つ。

参考文献

[1] Kurose, H. and Y. Nakagami. Compact Hopf *-algebras, quantum envepoling algebras and dual Woronowicz algebras, in prepatration.

[2] Masuda, T. and Y. Nakagami. An operator algebraic framework for the duality of quantum groups, *"Mathematical Physics X"*, Proc. AMP-91, Univ. Leipzig, 1991, edited by Schmüdgen, 291-295, Springer-Verlag, Berlin-Heiderberg-New York, 1992.

[3] Masuda, T. and Y. Nakagami. A von Neumann algebra framework for the duality of the quatum groups, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **30**(1994), 799-850.

[4] Masuda, T., Y. Nakagami and S. L. Woronowicz. A C^*-algebraic framework for quantum groups, in preparation.

[5] Nakagami, Y. Double group construction for compact Woronowicz algebras, *International J. Math.*, to appear.

[6] Podleś, P. and S. L. Woronowicz. Quantum deformation of Lorentz group, *Commun. Math. Phys.*, **130**(1990), 381-431.

[7] Reshetikhin, N., L. A. Takhtadzhyan and L. D. Faddeev. Quantization of Lie groups and Lie algebras, *Leningrad Math J.*, 1(1990), 193-225.

[8] Schmüdgen, K. *Unbounded Operator Algebras and Representation Theory*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.